Resistencia de materiales

Torsión

Matías Pacheco Alarcón & Estefano Muñoz Moya

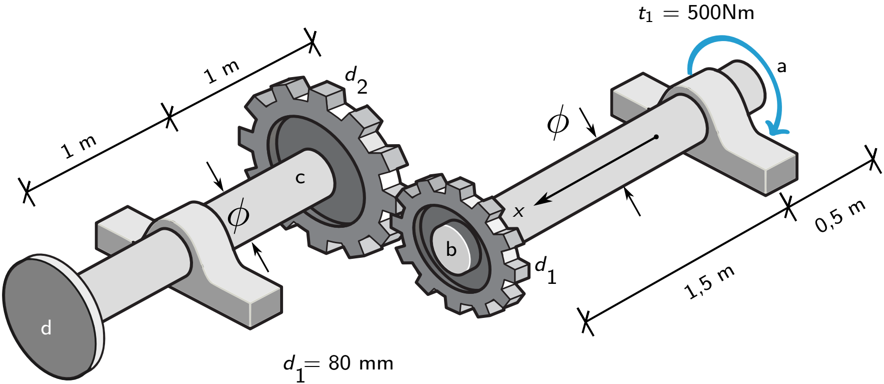
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - Chile
e-mail: matias.pacheco@usach.cl & estefano.munoz@usach.cl

Ingeniería Mecánica
4 de diciembre de 2020

Torsión con engranes:

Se tiene un sistema de engranes rígidos acoplados a partir de dos ejes de diámetro 30 [mm]. Ambos ejes son de acero (E=200[GPa] y ν=0,27), el eje $\overline{\mathbf{ab}}$ cuenta con un momento torsor aplicado de $t_1 = 500$ [Nm] y el eje cd se encuentra empotrado en **d**.

- Realice el diagrama de momento torsor y obtenga esfuerzo de corte máximo en el eje $\overline{\mathbf{ab}}$.
- Determine el ángulos de torsión $\theta_{c/a}$ y $\theta_{c/d}$



$d_1 = 80$ mm

$d_2 = 120$ mm

$\phi = 30$ mm

Torsión con engranes:

Primero se calcula el módulo de corte y el momento de inercia, de la forma:

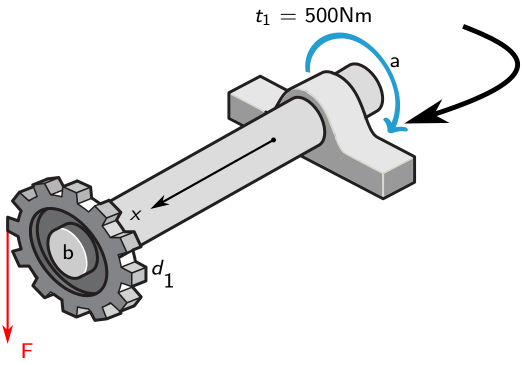
$$E = 200[GPa] \quad \nu = 0{,}27 \quad \rightarrow \quad G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)} = 78{,}74[GPa] \tag{1}$$

Ahora se puede calcular la inercia polar de ambos ejes:

$$J = \frac{\pi}{32} \cdot \phi^4 = 7{,}95 \cdot 10^{-8}[m^4] \tag{2}$$

Torsión con engranes:

Se realiza el diagrama de cuerpo libre del eje $\overline{\textbf{ab}}$:



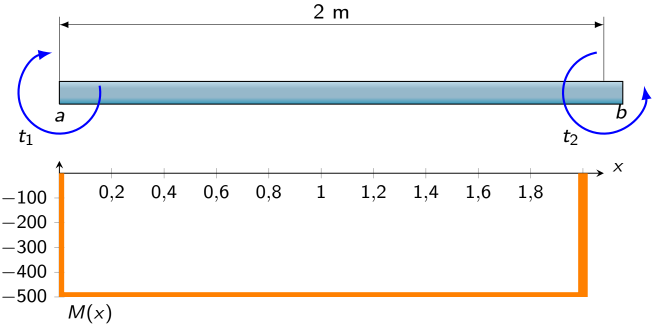
Para que el sistema esté en equilibrio, la fuerza de reacción debe equilibrar el momento torsor, de la forma:

$$\sum M = 0 :$$

$$t_f = F \cdot d_1 = t_1 \quad \rightarrow \quad F = 6250[N] \tag{3}$$

Torsión con engranes:

Entonces, el diagrama de momento torsor del eje $\overline{\mathbf{ab}}$ queda:



y el esfuerzo cortante máximo es:

$$\tau_{max} = \frac{t_1 \cdot \phi}{2 \cdot J} = 94{,}3[MPa] \tag{4}$$

Torsión con engranes:

Para determinar los ángulos de torsión $\theta_{c/a}$ y $\theta_{c/d}$, en primer lugar es necesario calcular el ángulo de torsión desde **a** hasta **b**:

$$\theta_{b/a} = \frac{t_1 \cdot 2}{J \cdot G} = 0{,}1597 \; rad \tag{5}$$

Luego, para llegar al punto **c** se deben relacionar los arcos de desplazamiento angular de cada engrane, los cuales son iguales entre sí, pero varían su rotación según el radio:

$$\theta_1 \cdot d_1 = \theta_2 \cdot d_2$$

Así:

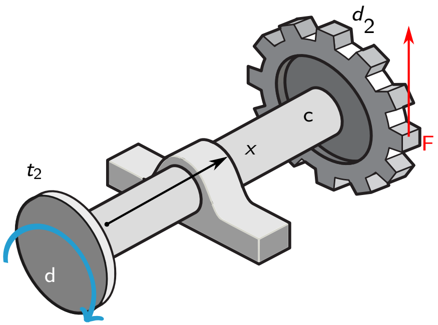
$$\theta_{c/a} = \theta_{b/a} \cdot \frac{d_1}{d_2} = 0{,}1065 \; rad \tag{6}$$

Realizando la conversión a grados:

$$\theta_{c/a} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \; rad} = 6{,}1^\circ \tag{7}$$

Torsión con engranes:

Para obtener el ángulo de **c** con respecto de **d** ($\theta_{c/d}$), es necesario realizar el diagrama de cuerpo libre del eje cd:



Para que el sistema esté en equilibrio, el empotramiento genera un momento torsor de la forma:

$$\sum M = 0 :$$

$$t_f = F \cdot d_2 = t_2 \quad \rightarrow \quad t_2 = 750[Nm] \tag{8}$$

Torsión con engranes:

Ahora se determina el ángulo de torsión $\theta_{c/d}$:

$$\theta_{c/d} = \frac{t_2 \cdot 2}{J \cdot G} = 0{,}2396\ rad \tag{9}$$

Realizando la conversión a grados:

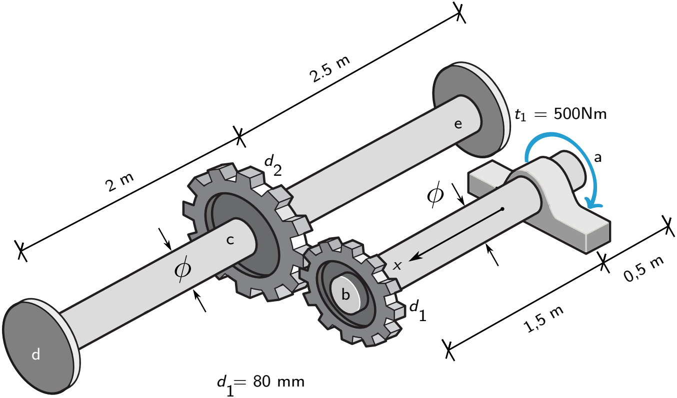
$$\theta_{c/d} \cdot \frac{180^\circ}{\pi\ rad} = 13{,}7^\circ \tag{10}$$

Debido a que el punto **d** se encuentra empotrado, el ángulo percibido es menor a $\theta_{c/a}$, debido a que **a** también se encuentra girando.

Torsión con engranes y doble empotramiento:

Si ahora el eje cd se encuentra doble empotrado en **d** y **e**:

- Realice el diagrama de momento torsor y obtenga esfuerzo de corte máximo en el eje $\overline{\mathbf{de}}$.
- Determine el ángulos de torsión $\theta_{c/d}$ y $\theta_{c/e}$



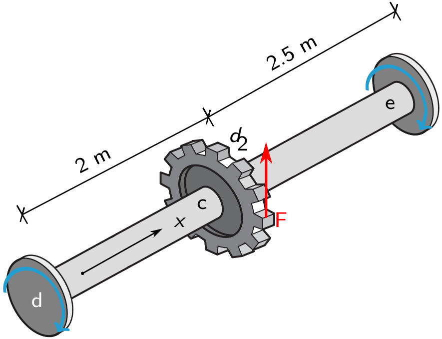
$d_1 = 80$ mm

$d_2 = 120$ mm

$\phi = 30$ mm

Torsión con engranes y doble empotramiento:

Como el diagrama de cuerpo libre el eje $\overline{\mathbf{ab}}$ se realizó anteriormente, el resultado de la fuerza será el mismo debido a la condición de equilibrio, por lo tanto, se realiza el diagrama de cuerpo libre del eje $\overline{\mathbf{de}}$:



Para que el sistema esté en equilibrio, el empotramiento genera un momento torsor de la forma:

$$\sum M = 0:$$

$$F \cdot d_2 = t_d + t_e \quad \rightarrow \quad t_d + t_e = 750[Nm] \tag{11}$$

Torsión con engranes y doble empotramiento:

Debido a que nos encontramos en una situación hiperestática, es necesario contar con una nueva ecuación para resolver el problema. Considerando que en los puntos **d** y **e** el eje se encuentra empotrado, no existe un deformación en esas zonas, tampoco un ángulo de giro, por lo tanto, considerando un ángulo de giro nulo en los extremos, se tiene:

$$\theta_{e/d} = \theta_{e/c} + \theta_{c/d} = 0$$

Así:

$$\theta_{e/c} + \theta_{c/d} = \frac{t_e \cdot 2{,}5}{J \cdot G} - \frac{t_d \cdot 2}{J \cdot G} = 0 \tag{12}$$

Por lo tanto, ahora se tiene un sistema de ecuaciones para determinar cada momento torsor:

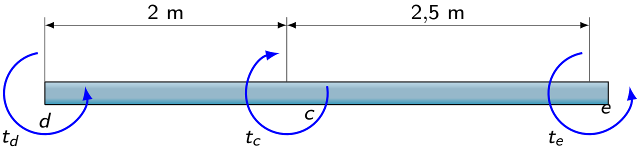
$$\begin{cases} 750 & = t_d + t_e \\ 0 & = t_e \cdot 2{,}5 - t_d \cdot 2 \end{cases} \tag{13}$$

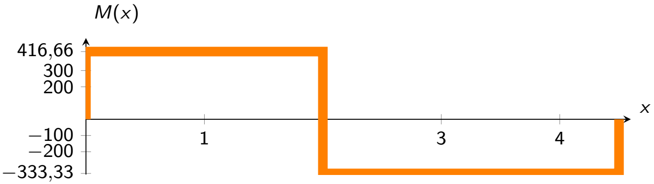
De esta forma se tiene:

$$\begin{gathered} t_e = 333{,}3[Nm] \\ t_d = 416{,}7[Nm] \end{gathered} \tag{14}$$

Torsión con engranes:

Entonces, el diagrama de momento torsor del eje de queda:



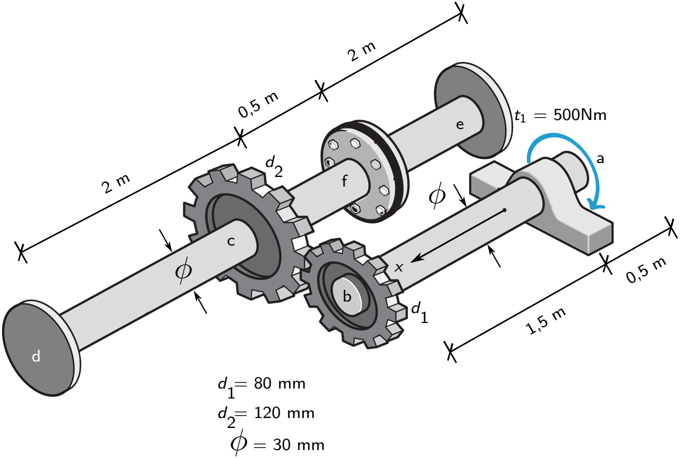


y el esfuerzo cortante máximo, considerando a t_d el mayor valor en ese eje, se tiene:

$$\tau_{max} = \frac{t_d \cdot \phi}{2 \cdot J} = 78{,}6[MPa] \tag{15}$$

Torsión con engranes, doble empotramiento y bridas:

Ahora el problema cuenta con un acople de bridas en el punto **f**. Determine el número de pernos necesarios de 5 [mm] de diámetro a una distancia de 25 [mm] del centro de eje ce para soportar un momento torsor igual al del ejercicio anterior. Considere que el esfuerzo cortante admisible es de 60 [MPa].



Torsión con engranes, doble empotramiento y bridas:

Considerando el momento soportado por la brida igual al momento torsor t_e (ecuación 14), el número de pernos necesarios se obtiene de la forma:

$$\tau = \frac{t_e}{A_p b n} \tag{16}$$

donde n es el número de pernos, $\tau = 60$ [MPa], $b = 25$ [mm] y $A_p = \pi \cdot r^2 = 19{,}6$ [mm^2]

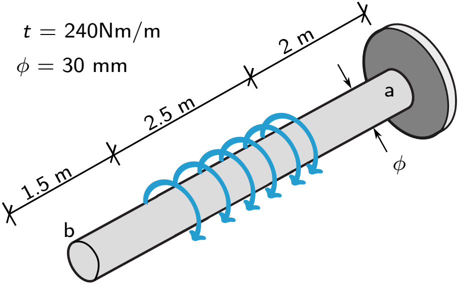
$$n = \frac{t_e}{A_p b \tau} = \frac{416667[Nmm]}{19{,}635[mm^2] \cdot 25[mm] \cdot 60[MPa]} = 14{,}15 \tag{17}$$

Por lo tanto, son necesarios aproximadamente 15 pernos para este caso en particular.

Torsión con momento distribuido:

El eje $\overline{\mathbf{ab}}$ (E=200 [GPa] y ν=0,27) cuenta con un momento distribuido t=240[Nm/m]. Para este ejercicio se pide:

- Realice el diagrama de momento torsor y obtenga esfuerzo de corte máximo en el eje $\overline{\mathbf{ab}}$.
- Determine el ángulo de torsión $\theta_{b/a}$.



Torsión con momento distribuido:

Primero se calcula el módulo de corte y el momento de inercia, de la forma:

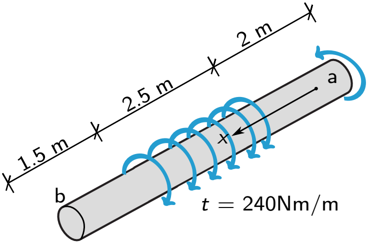
$$E = 200[GPa] \quad \nu = 0{,}27 \quad \rightarrow \quad G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} = 78{,}7[GPa] \tag{18}$$

Ahora se puede calcular la inercia polar del eje $\overline{\mathbf{ab}}$:

$$J = \frac{\pi}{32} \cdot \phi^4 = 7{,}95 \cdot 10^{-8}[m^4] \tag{19}$$

Torsión con momento distribuido:

Se realiza el diagrama de cuerpo libre del eje $\overline{\textbf{ab}}$:



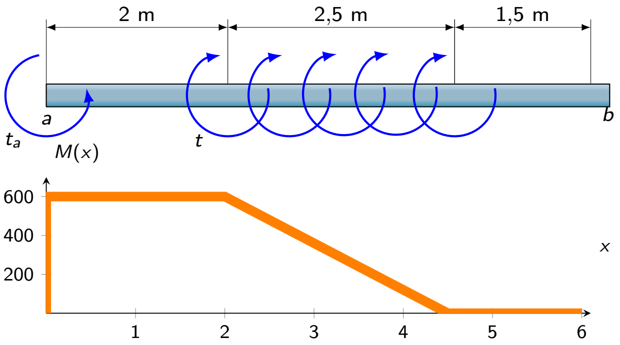
Debido a que el eje se encuentra sometido a un momento distribuido, es necesario integrar el momento distribuido en el largo de aplicación de éste, como es constante se puede simplificar y calcularlo directamente al multiplicar el valor del torsor por la distancia en que este actúa:

$$\sum M = 0 :$$

$$t_a - t \cdot 2{,}5 = 0 \quad \rightarrow \quad t_a = 600[Nm] \tag{20}$$

Torsión con momento distribuido:

Entonces, el diagrama de momento torsor del eje $\overline{\textbf{ab}}$ queda:



y el esfuerzo cortante máximo es:

$$\tau_{max} = \frac{t_a \cdot \phi}{2 \cdot J} = 113{,}2[MPa] \tag{21}$$

Torsión con momento distribuido:

Debido a que el diagrama de momento torsor muestra una disminución lineal entre $x = 2$, $y = 600$ y $x = 4,5$, $y = 0$, es necesario utilizar una función que represente ese comportamiento para esa sección en particular. Esto queda de la forma $t_m(x) = ax + b$. Obteniendo:

$$t_m(x) = -240x + 1080 \tag{22}$$

Para determinar el ángulo de torsión $\theta_{b/a}$ se realiza una integral sobre todo el largo, debido a que el momento torsor varía en función del largo $(t(x))$ se separa en secciones conocidas, la primera una sección con momento constante (600) y la segunda con una variación lineal t_m:

$$\begin{aligned}\theta_{b/a} &= \int_0^{4,5} \frac{t(x)}{J \cdot G} dx = \int_0^{2} \frac{t_a}{J \cdot G} dx + \int_2^{4,5} \frac{t_m(x)}{J \cdot G} dx = \frac{t_a \cdot 2}{J \cdot G} + \int_2^{4,5} \frac{t_m(x)}{J \cdot G} dx \\ &= \frac{600 \cdot 2}{J \cdot G} + \int_2^{4,5} \frac{-240x + 1080}{J \cdot G} dx = 0{,}311\ rad\end{aligned} \tag{23}$$

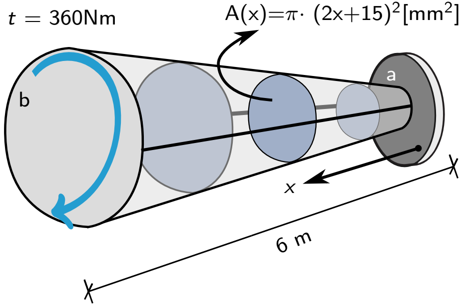
Realizando la conversión a grados:

$$\theta_{b/a} \cdot \frac{180^\circ}{\pi\ rad} = 17{,}84^\circ \tag{24}$$

Torsión con área de sección variable:

El eje $\overline{\mathbf{ab}}$ (E=200 [GPa] y ν=0,27) cuenta con una sección transversal variable de la forma $A(x)=\pi\cdot r^2=\pi\cdot(2x+15)^2$[mm^2]. Para este ejercicio se pide:

- Realice el diagrama de momento torsor y obtenga esfuerzo de corte máximo en el eje $\overline{\mathbf{ab}}$.
- Determine el ángulo de torsión $\theta_{b/a}$.



Torsión con área de sección variable:

Primero se calcula el módulo de corte y el momento de inercia, de la forma:

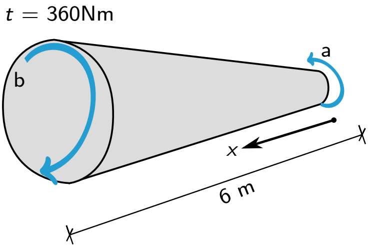
$$E = 200[GPa] \quad \nu = 0{,}27 \quad \rightarrow \quad G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} = 78{,}74[GPa] \tag{25}$$

Ahora se puede calcular la inercia polar del eje $\overline{\mathbf{ab}}$, considerando que el diámetro varía a lo largo de este:

$$J(x) = \frac{\pi}{32} \cdot \phi(x)^4 = \frac{\pi}{32} \cdot (2r(x))^4 = \frac{\pi}{32} \cdot (4x+30)^4 [mm^4] = \frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{4x+30}{1000}\right)^4 [m^4] \tag{26}$$

Torsión con área de sección variable:

Se realiza el diagrama de cuerpo libre del eje $\overline{\mathbf{ab}}$:



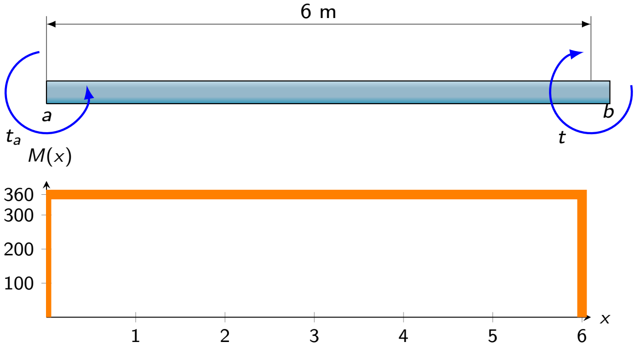
Para que el sistema esté en equilibrio, el empotramiento genera un momento torsor de la forma:

$$\sum M = 0 :$$

$$t_a - 360 = 0 \quad \rightarrow \quad t_a = 360[Nm] \tag{27}$$

Torsión con área de sección variable:

Entonces, el diagrama de momento torsor del eje $\overline{\mathbf{ab}}$ queda:



El esfuerzo cortante máximo es mayor cuando el radio es menor, es decir, en el punto **a**:

$$\tau_{max} = \frac{t_a \cdot \phi(x)}{2 \cdot J(x)} = \frac{t_a \cdot 2r(x)}{2 \cdot J(x)} = \frac{t_a \cdot \frac{4x+30}{1000}}{2 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{4x+30}{1000}\right)^4} = 67{,}9[MPa] \tag{28}$$

Torsión con área de sección variable:

Para determinar el ángulo de torsión $\theta_{b/a}$ se realiza una integral, debido a que el radio se distribuye de forma mediante la ecuación r(x) = 2x+15 a lo largo del eje x, por lo tanto, el momento de inercia polar también cambia su magnitud:

$$\theta_{b/a} = \int_0^6 \frac{t}{J(x)\cdot G}dx = \int_0^6 \frac{360}{\frac{\pi}{32}\cdot\left(\frac{4x+30}{1000}\right)^4\cdot G}dx = 0{,}119\ rad \tag{29}$$

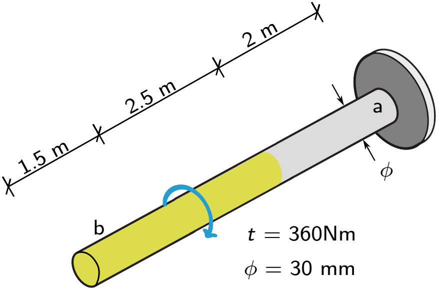
Realizando la conversión a grados:

$$\theta_{b/a}\cdot\frac{180^\circ}{\pi\ rad} = 6{,}82^\circ \tag{30}$$

Torsión con cambio de material en el eje:

El eje $\overline{\mathbf{ab}}$ cuenta con un material de acero (E=200 [GPa] y ν=0,27) los primeros dos metros, y el resto está compuesto de latón (E=110 [GPa] y ν=0,4). Se aplica un momento torsor t = 360 [Nm] a 4,5 [m] de **a**. Para este ejercicio se pide:

- Realice el diagrama de momento torsor y obtenga esfuerzo de corte máximo en el eje $\overline{\mathbf{ab}}$.
- Determine el ángulo de torsión $\theta_{b/a}$.



Torsión con cambio de material en el eje:

Primero se calcula el módulo de corte y el momento de inercia, de la forma:

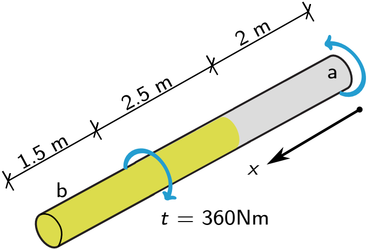
$$\begin{aligned} E_a = 200[GPa] \quad \nu_a = 0{,}27 \quad &\rightarrow \quad G_a = \frac{E_a}{2\left(1+\nu_a\right)} = 78{,}74[GPa] \\ E_l = 110[GPa] \quad \nu_l = 0{,}40 \quad &\rightarrow \quad G_l = \frac{E_l}{2\left(1+\nu_l\right)} = 39{,}29[GPa] \end{aligned} \tag{31}$$

Ahora se puede calcular la inercia polar del eje $\overline{\mathbf{ab}}$:

$$J = \frac{\pi}{32} \cdot \phi^4 = 7{,}95 \cdot 10^{-8}[m^4] \tag{32}$$

Torsión con cambio de material en el eje:

Se realiza el diagrama de cuerpo libre del eje $\overline{\textbf{ab}}$:



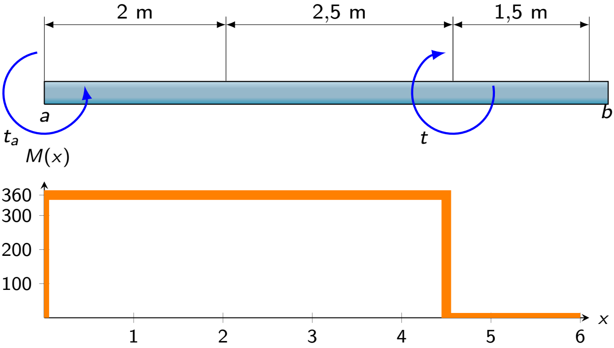
Para que el sistema esté en equilibrio, el empotramiento genera un momento torsor de la forma:

$$\sum M = 0 :$$

$$t_a - 360 = 0 \quad \rightarrow \quad t_a = 360[Nm] \tag{33}$$

Torsión con cambio de material en el eje:

Entonces, el diagrama de momento torsor del eje $\overline{\mathbf{ab}}$ queda:



y el esfuerzo cortante máximo es:

$$\tau_{max} = \frac{t_a \cdot \phi}{2 \cdot J} = 67{,}91[MPa] \tag{34}$$

Torsión con cambio de material en el eje:

Para determinar el ángulo de torsión $\theta_{b/a}$ se separa la integral en los puntos de cambio de material, debido a que el módulo de corte es distinto para el acero y latón (ecuación 31):

$$\theta_{b/a} = \int_0^{4,5} \frac{t_a}{J \cdot G(x)} dx = \int_0^{2} \frac{t_a}{J \cdot G_a} dx + \int_2^{4,5} \frac{t_a}{J \cdot G_l} dx = \frac{t_a \cdot 2}{J \cdot G_a} + \frac{t_a \cdot 2,5}{J \cdot G_l} = 0,403\ rad \quad (35)$$

Realizando la conversión a grados:

$$\theta_{b/a} \cdot \frac{180^\circ}{\pi\ rad} = 23,09^\circ \quad (36)$$

DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Resistencia de materiales
Torsión

Matías Pacheco Alarcón & Estefano Muñoz Moya

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - Chile
e-mail: matias.pacheco@usach.cl & estefano.munoz@usach.cl

Ingeniería Mecánica
4 de diciembre de 2020